Año: 1994

MINISTERIO DE TRABAJO Y ASUNTOS SOCIALES ESPAÑA
INSTITUTO NACIONAL DE SEGURIDAD E HIGIENE EN EL TRABAJO

NTP 418: Fiabilidad: la distribución lognormal

Realiability: the lognormal distribution
Fiabilité: la distribution lognormale

Redactores:

José Mª Tamborero del Pino
Ingeniero Industrial

Antonio Cejalvo Lapeña
Ingeniero Industrial

CENTRO NACIONAL DE CONDICIONES DE TRABAJO

Introducción

La prevención de fallos en instalaciones industriales de proceso está basada en gran parte en la aplicación de los probabilísticos de análisis de riesgos. Todo ello se ha llevado a cabo a través de una disciplina denominada ingeniería de fiabilidad, para la cual se dispone de las adecuadas técnicas de predicción y prevención, que han sido fundamentales para el aseguramiento de la calidad y la seguridad de productos y procesos.

Los elementos y dispositivos con funciones clave de seguridad, además de ser idóneos ante unas exigencias del sistema, deben asegurar una correcta respuesta en el tiempo. Para ello es imprescindible establecer un programa de mantenimiento que permita mantenerlos en buenas condiciones de uso, renovándolos antes de que su tasa de fallos sea inaceptable.

Todo ello requiere conocer a priori la fiabilidad de los elementos de seguridad que se instalan en las instalaciones, información que debería ser suministrada por los fabricantes, considerando como datos primordiales los empíricos existentes en bancos de datos de fiabilidad de componentes, funcionando en condiciones y ambientes determinados. Esta fiabilidad debe ser debidamente controlada y contrastada a través del propio programa de mantenimiento, a fin de verificar que se está dentro de las condiciones de respuesta del sistema esperadas. Sólo entonces se podrá afirmar que la probabilidad de fallo de un componente es conocida y está controlada.

Nota: Para conocerlos conceptos básicos sobre la fiabilidad se remite al lector a la NTP Nº 316 Distribución exponencial.

Objetivos

El objetivo de la presente NTP es dar a conocer un tipo de distribución estadística aplicable al estudio de la fiabilidad de componentes técnicos que, dentro de una misma clase, presentan distintos valores como consecuencia de la conjunción de una serie de factores tales como su procedencia, carga, temperatura de su entorno, presión de trabajo, medio ambiente de trabajo (agua, aire, ácidos.) etc. La distribución lognormal tiene, principalmente, las siguientes aplicaciones:

a. Representa la evolución con el tiempo de la tasa de fallos, $\lambda(t)$, en la primera fase de vida de un componente, la correspondiente a los fallos infantiles en la "curva de la bañera" entendiéndose como tasa de fallos la probabilidad de que un componente que ha funcionado hasta el instante t, falle entre t y t + dt. En este caso la variable independiente de la distribución es el tiempo (figura 1).
b. Permite fijar tiempos de reparación de componentes, siendo también en este caso el tiempo la variable independiente de la distribución.
c. Describe la dispersión de las tasas de fallo de componentes, ocasionada por diferente origen de los datos, distintas condiciones de operación, entorno, bancos de datos diferentes, etc. En este caso la variable independiente de la distribución es la tasa de fallos.

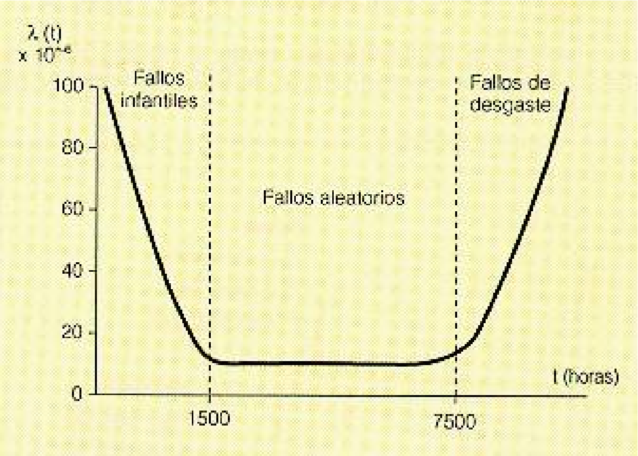

Fig. 1: Curva típica de la evolución de la tasa de fallos

Características de la distribución

La distribución lognormal se obtiene cuando los logaritmos de una Variable se describen mediante una distribución normal. Es el caso en el que las variaciones en la fiabilidad de una misma clase de componentes técnicos se representan considerando la tasa de fallos λaleatoria en lugar de una variable constante.

Es la distribución natural a utilizar cuando las desviaciones a partir del valor del modelo están formadas por factores, proporciones o porcentajes más que por valores absolutos como es el caso de la distribución normal.

La distribución lognormal tiene dos parámetros: m* (media aritmética del logaritmo de los datos o tasa de fallos) y σ(desviación estándar del logaritmo de los datos o tasa de fallos).

Propiedades

La distribución lognormal se caracteriza por las siguientes propiedades:

- Asigna a valores de la variable < 0 la probabilidad 0 y de este modo se ajusta a las tasas y probabilidades de fallo que de esta forma sólo pueden ser positivas.
- Como depende de dos parámetros, según veremos, se ajusta bien a un gran número de distribuciones empíricas.
- Es idónea para parámetros que son a su vez producto de numerosas cantidades aleatorias (múltiples efectos que influyen sobre la fiabilidad de un componente).
- La esperanza matemática o media en la distribución lognormal es mayor que su mediana. De este modo da más importancia a los valores grandes de las tasas de fallo que una distribución normal con los mismos percentiles del 5% y 50% tendiendo, por tanto, a ser pesimista. Esta propiedad se puede apreciar en la figura 2.

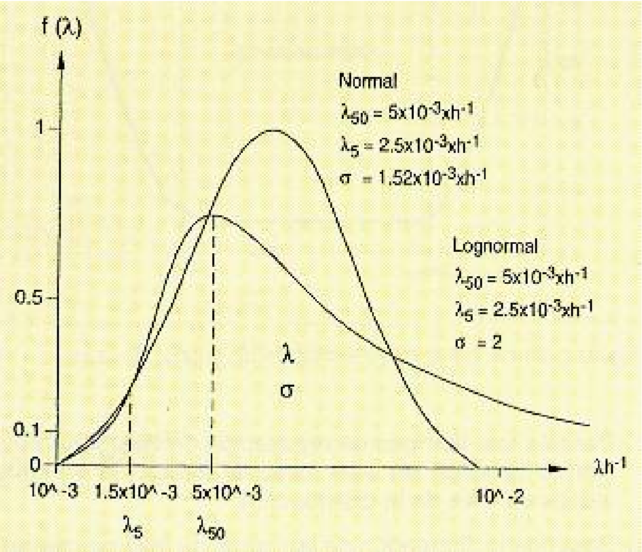

Fig. 2: Comparación entre una distribución normal y una lognormal con los mismos percentiles del 5% y 50%. (Distribución normal normalizada a 1, distribución lognormal con el mismo factor)

Variable independiente: el tiempo

La distribución lognormal se ajusta a ciertos tipos de fallos (fatiga de componentes metálicos), vida de los aislamientos eléctricos, procesos continuos (procesos técnicos) y datos de reparación y puede ser una buena representación de la distribución de los tiempos de reparación. Es también una distribución importante en la valoración de sistemas con reparación.

La distribución lognormal es importante en la representación de fenómenos de efectos proporcionales, tales como aquellos en los que un cambio en la variable en cualquier punto de un proceso es una proporción aleatoria del valor previo de la variable. Algunos fallos en el programa de mantenimiento entran en esta categoría.

Según hemos visto, la distribución lognormal es aquella en que el logaritmo de la variable está distribuida normalmente. Por tanto podemos obtener la función densidad de probabilidad de la distribución lognormal a partir de la distribución normal mediante la transformación:

$$\tau = \ln t \quad (1)$$

donde t está distribuida normalmente. La función densidad de probabilidad de la distribución normal es:

$$f(\tau) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau - \tau_0}{\sigma}\right)^2\right] \quad (2)$$

Para la distribución normal el parámetro de localización, τ_0 es también la media, por lo que se cumple que:

$$\tau_0 = \tau_m \quad (3)$$

donde

τ_0 = parámetro de localización

τ_m = media

En la transformación de cualquier distribución estadística se debe satisfacer la siguiente. condición:

$$f(t)\,dt = f(\tau)\,d\tau \quad (4)$$

y por tanto:

$$f(t) = f(\tau)\frac{d\tau}{dt} \quad (5)$$

Teniendo en cuenta la transformación (1) se tiene:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{t} \quad (6)$$

Entonces la distribución lognormal puede ser obtenida sustituyendo las igualdades (1), (2) y (6) en la (5) obteniéndose:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma t(2\pi)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \ln t_m}{\sigma}\right)^2\right] \quad (7)$$

siendo

σ= desviación estándar en la distribución normal

t_m = tiempo medio

t = tiempo

La ecuación (7) también puede escribirse de la siguiente forma:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma t(2\pi)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(t/t_m)}{\sigma}\right)^2\right] \quad (8)$$

Se puede resaltar que el parámetro de localización de la distribución normal original se ha convertido ahora en un parámetro de escala coincidente con la media. La dispersión a es también un parámetro de forma según se puede ver en la figura 3, donde aparece la función densidad de probabilidad de la distribución lognormal para distintos valores de σ(0,4; 0,6; 1,0 y 1,4).

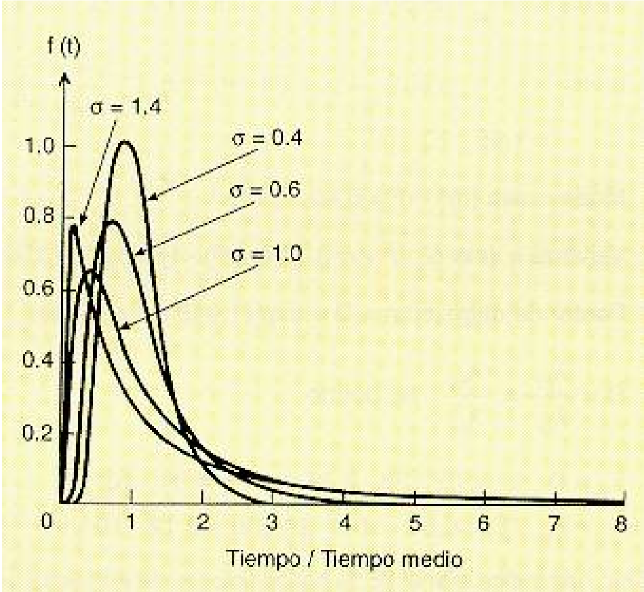

Fig. 3: Función densidad de probabilidad para distintos valores de σ(0,4 a 1,4)

Para valores medios y altos de σ, la distribución lognormal es significativamente asimétrica, pero a medida que a decrece la distribución es más simétrica. Si σse acerca a la unidad, la distribución lognormal es equivalente aproximadamente a la distribución exponencial negativa. También se puede observar que para valores de σ< 0,2 la distribución lognormal se aproxima a la distribución normal. (Ver figura 4).

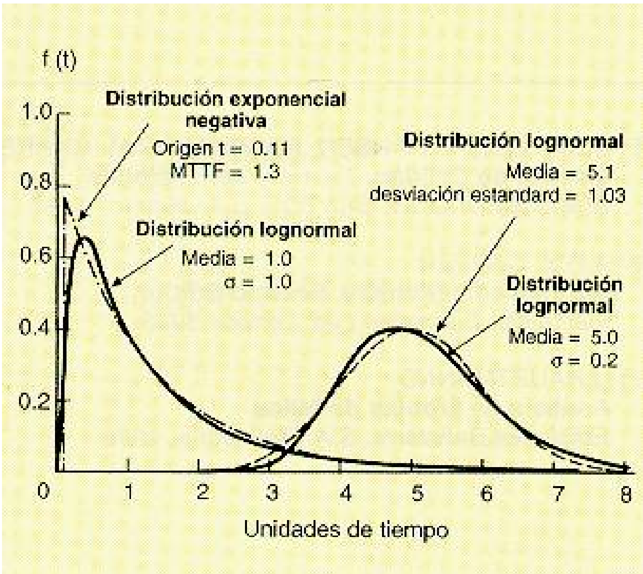

Fig. 4: Comparación entre la distribución lognormal y las distribuciones normal y exponencial

Para efectuar cálculos se puede escribir la ecuación (8) de la siguiente forma:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma t} f_N\left[\left(\frac{\ln(t/t_m)}{\sigma}\right)^2\right] \quad (9)$$

donde f_N es la forma estándar de la función densidad de probabilidad de la distribución normal y puede ser obtenida a partir de tablas. La indisponibilidad Q (t) es la función acumulativa de la probabilidad y aplicada a los fallos de los componentes, representa la probabilidad de que el componente falle antes de t.

$$Q(t) = \int_0^T f(t)dt = \int_{-\infty}^T f(\tau)d\tau = F_N\left[\left(\frac{\ln(t/t_m)^2}{\sigma}\right)\right] \quad (10)$$

Siendo F_N la función acumulativa normalizada de la distribución normal, que también puede obtenerse en tablas estadísticas. Asimismo podemos establecer la expresión de la Fiabilidad R (t) obtenida a partir de la Indisponibilidad Q (t):

$$R(t) = 1 - Q(t) = 1 - f_N\left[\left(\frac{\ln(t/t_m)}{\sigma}\right)^2\right] \quad (11)$$

Y la tasas de fallos λ(t):

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (12)$$

Variable independiente: la tasa de fallos

La aplicación más importante de la distribución lognormal es la descripción de la dispersión existente en los datos de tasas de fallos de componentes. La función densidad de λ, se puede escribir a partir de la ecuación (7) de la siguiente forma:

$$f(\lambda) = \frac{1}{\sigma\lambda(2\pi)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(\ln\lambda - m^*)^2}{\sigma^2}\right] \quad (13)$$

con $\lambda > 0$; $\sigma > 0$; $-\infty < m^* < \infty$

En la ecuación (13) m* y σ^2 son la esperanza o media y la varianza, respectivamente, de los logaritmos de las tasas de fallos. Sus valores se obtienen mediante las siguientes estimaciones:

$$m^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \ln\lambda_n \quad (14)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N} (\ln\lambda_n - m^*)^2 \quad (15)$$

Siendo N el número total de valores de la tasa de fallos de un componente.

Puede resultar práctico conocer la probabilidad de que un valor de λaleatorio sea menor que un valor determinado λ_0. Este valor se obtiene por medio de la integración de la función densidad de probabilidad de la tasa de fallos que se ha expuesto en la igualdad (13) obteniéndose la siguiente expresión:

$$P\{\lambda < \lambda_0\} = \int_0^{\lambda_0} f(\lambda)d\lambda$$

$$P\{\lambda < \lambda_0\} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma}\int_0^{\lambda_0} \frac{1}{\lambda}\exp\left(\frac{(\ln\lambda - m^*)}{2\sigma^2}\right)d\lambda$$

Mediante la transformación:

$$z = \frac{(\ln\lambda - m^*)}{\sigma} \qquad \frac{dz}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda\sigma}$$

La expresión anterior se convierte en la siguiente:

$$P\{\lambda < \lambda_0\} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{(\ln\lambda_0 - m^*)/\sigma} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz \quad (16)$$

Siendo el miembro derecho de esta igualdad la función de distribución normal.

Damos a continuación la expresión de algunos de los parámetros de la distribución lognormal de las tasas de fallo:

$$\text{Mediana} = \lambda_{50} = \exp m^* \quad (17)$$

$$\text{Media} = \lambda = \lambda_{50}\exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) = \exp\left(m^* + \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad (18)$$

$$\text{Moda} = \exp(m^* - \sigma^2) \quad (19)$$

$$\text{Varianza} = \left[\exp(2m^* + \sigma^2)\right]\cdot\left[\exp(\sigma^2) - 1\right] \quad (20)$$

Siendo m* y σla media y la desviación estándar del logaritmo neperiano de las tasas de fallos.

Para caracterizar la distribución lognormal, normalmente se indica, además de su mediana (17), su factor de dispersión D, que tiene la siguiente expresión:

$$D = \frac{\lambda_{50}}{\lambda_{05}} = \frac{\lambda_{95}}{\lambda_{50}} = \exp(1{,}645\sigma) \qquad (21)$$

En la ecuación (21), 1,645 es aquel valor del límite superior de la integral de la ecuación (16) para el cual ésta tiene un valor de 0,95 (≤ 95 %) y los subíndices indican los percentiles correspondientes de la tasa de fallo λ.

Con la elección del factor 1,645 el intervalo [λ_{50}/D, λ_{50} . D] abarca el 90% de todos los valores posibles de λquedándose el 5% por debajo del límite inferior y otro 5% por encima del límite superior.

Caso práctico

De bancos de datos de fiabilidad de componentes y de la bibliografía se han extraído los siguientes valores de la tasa de fallos, correspondientes al fallo en la apertura de una válvula de seguridad: λ_i (i = 1,...,4) (2 · 10^{-6} ; 8 · 10^{-5}; 9,1 · 10^{-5}; 1,6 · 10^{-6} h^{-1}).

Se trata de calcular los parámetros que nos definen la distribución lognormal de las tasas de fallo (la mediana, varianza, media, moda, el factor de dispersión y los valores λ_{05} y λ_{95}).

Solución: Calculemos primero los parámetros que nos definen la distribución normal de los logaritmos de las tasas de fallos, es decir m* y σ^2.

$$m^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \ln\lambda = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{4} \ln\lambda_n = \frac{1}{4}(\ln 2\cdot 10^{-6} +$$
$$+\ln 8\cdot 10^{-5} + \ln 9{,}1\cdot 10^{-5} + \ln 1{,}6\cdot 10^{-6}) = -11{,}3015$$
$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(\ln\lambda_n - m^*)^2 = \frac{1}{4-1}\sum_{n=1}^{4}(\ln\lambda_n + 11{,}3015)^2 =$$
$$= 4{,}9901$$

Calculemos los parámetros que nos definen la distribución lognormal:

$$\text{Mediana} = \lambda_{50} = \exp m^* = \exp(-11{,}3015) = 1{,}23\cdot 10^{-5}\,h^{-1}$$
$$\text{Media} = \lambda = \lambda_{50} = \exp(\frac{\sigma^2}{2}) = 1{,}23\cdot 10^{-5}\exp(\frac{4{,}9901}{2}) =$$
$$= 1{,}49\cdot 10^{-4}\,h^{-1}$$
$$\text{Moda} = \exp(m^* - \sigma^2) = 8{,}40\cdot 10^{-8}\,h^{-1}$$
$$\text{Varianza} = \left[\exp(2m^* + \sigma^2)\right]\cdot\left[\exp(\sigma^2) - 1\right] = 3{,}27\cdot 10^{-6}\,h^{-1}$$
$$\text{Factor de dispersión} = D = \exp(1{,}645\sigma) = 39{,}38$$
$$D = \frac{\lambda_{50}}{\lambda_{05}} = \frac{\lambda_{95}}{\lambda_{50}};\text{de donde}$$
$$\lambda_{95} = D\cdot\lambda_{50} = 27{,}198\cdot 6{,}63\cdot 10^{-6} = 4{,}84\cdot 10^{-4}\,h^{-1}$$
$$\lambda_{05} = \lambda_{50}\,/\,D = 6{,}63\cdot 10^{-6}\,/\,27{,}198 = 3{,}12\cdot 10^{-7}\,h^{-1}$$

Esto nos indica que el 95 % de los valores de las tasas de fallos obtenidas serán superiores o iguales a 4,84 -10^{-4} h^{-1}. Por otro lado, se puede afirmar que el 5 % de los valores de las tasas de fallos obtenidas serán inferiores o iguales a 3,12 · 10^{-7} h^{-1}.

Bibliografía

(1) PATRICK D. T. O'CONNOR
Practical Reliability Engineering
John Wiley & Sons, Chichester, 1992

(2) J. MOTHES- J.TORRENS-IBERN
Estadística aplicada a la ingeniería
Ediciones Ariel. Esplugues de Llobregat 1970

(3) A.E.GREEN
Safety Systems Reliability
John Wiley & Sons, Chichester, 1983

(4) NORBERT L. ENRICK y otros

Control de Calidad y Beneficio empresarial
Ediciones DIAZ DE SANTOS, S.A., Madrid, 1989

(5) BERTRAND L. HANSEN, PRABHAKAR M. GHARE
Control de Calidad. Teoría y aplicaciones
Ediciones DIAZ DE SANTOS, S.A., Madrid, 1990

(6) A.D.S. CARTER
Mechanical reliability. Second Edition
Macmillan Education Lyd, London 1986

(7) U.HAUPTMANNS
Análisis de árboles de fallos
Ediciones Bellaterra, S.A. Barcelona, 1986
